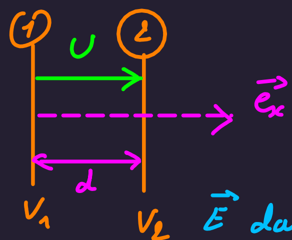
Problème 1 : accélérateur linéaire

I-1-a



On a : $\vec{E} = \frac{V_1 - V_2}{d}\vec{e}_x$

Pour Na^+, $q > 0$, on veut $\vec{E}$ dans le sens de $\vec{e}_x$ donc $\boxed{V_1 - V_2 > 0}$ ie $\boxed{U < 0}$

I-1-b Mouvement conservatif : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv_U^2 + qV$

en (1) : $\mathcal{E}_m = 0 + eV_1$

en (2) $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 + eV_2$ $\quad v_U = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \boxed{\sqrt{\frac{2e|U|}{m}} = 4{,}6 \cdot 10^5\ m.s^{-1}}$

non relativiste car $\ll 10^8\ m.s^{-1}$

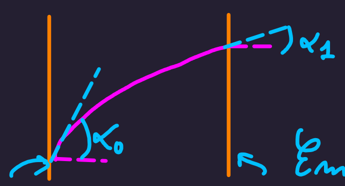
Calcul de la durée Loi de la qdm ; avec $\dot{x}(0) = 0$; $x(0) = 0$

$m\ddot{x} = eE = \frac{e|U|}{d} \rightarrow x = \frac{e|U|}{2dm}t^2$

$x = d$ pour $\boxed{t = \sqrt{\frac{2d^2m}{e|U|}} = d\sqrt{\frac{2m}{e|U|}} = 4{,}4 \cdot 10^{-8}\ s}$

d : 1 cm ; m : 23 u ; e : $1{,}6 \cdot 10^{-19}$; $|U|$: 25 kV

I-1-c



$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2 + eV_1$

l'accélération « rabat » $\vec{v}$.

$v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2e|U|}{m}}$

$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_1^2 + eV_2$

L'accélération ne change pas $v_y = v \sin\alpha$

$v_0 \sin\alpha_0 = v_1 \sin\alpha_1$

$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_0 \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2e|U|}{m}}} = \frac{\sin\alpha_0}{\sqrt{1 + \frac{v_U^2}{v_0^2}}} \rightarrow \boxed{\alpha_1 = 1{,}2°}$

α_0 : 5° ; $\frac{2e|U|}{m} = v_U^2$; $\frac{v_U^2}{v_0^2} = 4$

$v_1 = v_U\sqrt{1 + \frac{1}{16}} = \boxed{v_U\sqrt{\frac{17}{16}} \approx v_U}$

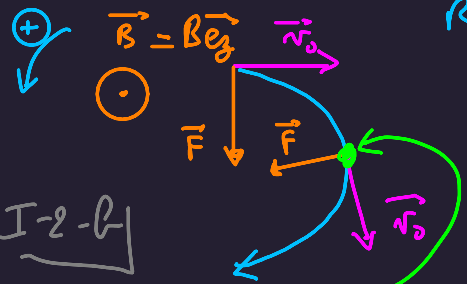
I-2a La force de Lorentz magnétique $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est $\perp \vec{v}$ donc ne travaille pas : $\mathcal{E}_c = cte \rightarrow$ le mouvement est uniforme

On admet qu'il est circulaire :

Loi de la qdm : $m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r \\ \vec{v} = -v\vec{e}_\theta\end{array}\right\}$ circulaire uniforme :

sens horaire $\quad -\frac{mv^2}{R} = -eBv$



$\boxed{R = \frac{mv}{eB}}$

I-2-b

$v = \frac{2\pi R}{T}$ $\quad \boxed{T = \frac{2\pi m}{eB} \quad \omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{eB}{m}}$

à $t = \frac{m\pi}{2eB}$ on a parcouru 1/4 tour

II-1) Dans chaque cylindre : $\vec{E} = \vec{0}$ donc $\mathcal{E}_c = \text{cte}$

D'un cylindre à l'autre $\Delta \mathcal{E}_c = -\Delta \mathcal{E}_p = -e\Delta V$

On a $V_0 = 0$; $V_1 = -U$; $V_2 = 0$; $V_3 = -U$; $V_4 = 0$

De (0) à (1) : $\Delta V = U$: $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m v_U^2$ dans (1)

De (1) à (2) $\Delta V = -U$ $\mathcal{E}_c = 0$ dans (2)

Une tension stationnaire ne permettra pas de poursuivre l'accélération.

II-2a) On a $V(t) = -U\cos(2\pi f t)$

• à $t = 0$ $V(t) = -U$ → accélération entre (0) et (1)

$v_1 = v_U$ dans (1) $\boxed{\mathcal{E}_{c1} = eU}$

il sort de (1) à $t_1 = \frac{\ell_1}{v_U}$

• à $t_1 = \frac{\ell_1}{v_U}$ il est accéléré entre (1) et (2) si

$V_1 - V_2 = -U$: il faut donc $V(t) = +U$

soit $2\pi f t_1 = \pi$ ie $t_1 = \frac{1}{2f} = \frac{\ell_1}{v_U}$ $\boxed{\ell_1 = \frac{v_U}{2f}}$

• la traversée (1) → (2) fait gagner $\Delta \mathcal{E}_c = eU$

il arrive en (2) avec $v_2^2 = v_U^2 + \frac{2eU}{m} = 2 v_U^2$

$\boxed{v_2 = \sqrt{2}\, v_U}$ $\boxed{\mathcal{E}_{c2} = 2eU}$

• il traverse (2) en $t_2 = \frac{\ell_2}{v_2}$ et comme avant, la tension doit avoir changé de signe soit

$t_2 = \frac{1}{2f}$ $\ell_2 = \frac{v_2}{2f}$ $\boxed{\ell_2 = \frac{\sqrt{2}\, v_U}{2f}}$

• Croissance arithmétique $\boxed{\mathcal{E}_{cn} = neU}$

• Croissance en $\sqrt{n}$ des longueurs $\boxed{\ell_n = \frac{\sqrt{n}\, v_U}{2f} = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{neU}{2m}}}$

25 kV

1 MHz 23 u

$\boxed{\begin{array}{l} \ell_1 = 23 \text{ cm} \\ \ell_2 = \sqrt{2}\,\ell_1 = 32 \text{ cm} \end{array}}$

Plus f est élevé, plus ℓ ↘ → dispositif plus compact.

II-2-b) Pour $\mathcal{E}_c = 100$ keV, il faudra $\frac{100}{25} = 4$ cylindres, de longueur totale $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 = \boxed{\frac{1}{f}\sqrt{\frac{eU}{2m}} \sum_{i=1}^{4} \sqrt{i} = 2{,}0 \text{ m}}$

en négligeant l'espace entre les cylindres.

II-2c) Pour $v = \frac{9c}{10}$, on a $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2{,}3$.

Le nombre de cylindres est

$$\boxed{n = \frac{\mathcal{E}_c}{eU} = \frac{(\gamma - 1) m c^2}{eU} = 27}$$

me

2,3

25 kV

Remarquons que ce nombre serait beaucoup plus élevé pour Na^+, bien plus massif.

Pour des particules relativistes, $v \to c$ quand $\mathcal{E}_c \to \infty$, la longueur des cylindres tend vers

$$\boxed{\ell_\infty = \frac{c}{2f}}$$

II-3a)

• ⓪ → ① la tension est $-U\cos(2\pi f t_0)$, il sera moins accéléré, et passant en ① avec

$$\mathcal{E}'_{c1} = eU\cos(2\pi f t_0)$$

• il traverse ① en $\dfrac{\ell_1}{\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_{c1}}{m}}} = \dfrac{1}{2f}\dfrac{1}{\sqrt{\cos(\underbrace{2\pi f t_0}_{\alpha})}} = \Delta t'_1$

et passant en ② à $t = t_0 + \Delta t'_1 = \boxed{\dfrac{\alpha}{2\pi f} + \dfrac{1}{2f\sqrt{\cos(\alpha)}} = t'_1}$

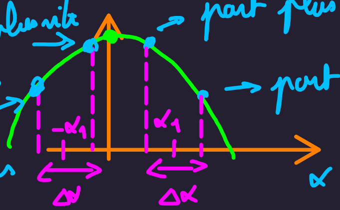
• Pour un départ à $t = -t_0$

$\mathcal{E}''_{c1} = \mathcal{E}'_{c1}$ par parité de cos. $\Delta t''_1 = \Delta t'_1$

et $\boxed{t''_1 = -\dfrac{\alpha}{2\pi f} + \dfrac{1}{2f\sqrt{\cos(\alpha)}}}$

II-3-b) On a $\mathcal{E}_c = eU\cos(\alpha)$; $\Delta\alpha = 2\pi f \Delta t$; $\alpha_1 = 2\pi f t_1$.

part plus tard mais va plus vite



→ part plus tôt et va plus vite

→ part plus tard et va moins vite

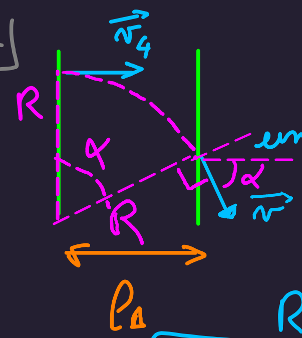
part plus tôt mais va moins vite

le paquet s'étale

le paquet tend à se regrouper.

Il vaut mieux avoir $t_1 < 0$ pour garder un paquet compact.

II-4-a)



Le mouvement est circulaire uniforme de rayon (cf I-2) $R = \dfrac{m v_4}{qB}$. On lit géométriquement

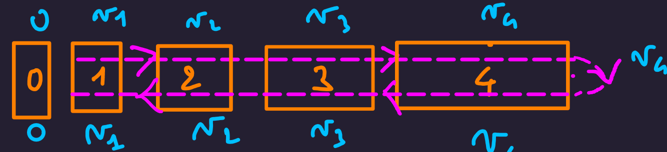
$R\sin\alpha_B = \ell_B$ $\quad \sin\alpha_B = \dfrac{\ell_B\, q B}{m v_4}$

On a $v_4 = \sqrt{\dfrac{8eU}{m}}$

On calcule $\boxed{\ell_B = \dfrac{\sqrt{8eUm}}{eB}\sin(\alpha_B) = 15\,\text{cm}}$

25 kV ; 23 u ; $\pi/4$; $e \to q$; $B \approx 1\,T$

II-4-b) On veut avoir



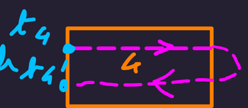
Il faut

ⓐ • que les traversées ④ → ③ → ② → ① diminuent l'$\mathcal{E}_c$ de eU

ⓑ • qu'on ait la place de faire $\frac{1}{2}$ tour.

ⓐ : à t_4, on a $V_4 = 0$ $V_3 = +U$ pour accélérer de ③ à ④.

Il suffit que la durée dans 4



soit un multiple de $\dfrac{1}{f}$, ainsi on aura en t'_4 $\begin{cases} V_4 = 0 \\ V_3 = +U \end{cases}$

et le champ $\vec{E}$ diminuera l'$\mathcal{E}_c$ de eU.

On arrivera à 3 → 2 avec v_3 et $V_3 = -U$, $V_2 = 0$

→ $\Delta E_c = eU$ de nouveau et ainsi de suite. $t_4' - t_4 = \frac{2\ell_4}{v_4} + \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{1}{f} + \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{p}{f}$ $p \in \mathbb{N}$

soit $\frac{\pi}{\omega_c} = \frac{n}{f}$ $n \in \mathbb{N}$ ie $\boxed{B = \frac{\overset{23u}{m}\,\pi\, \overset{1\,MHz}{f}}{n\, e} = \frac{0{,}75\,T}{n}}$

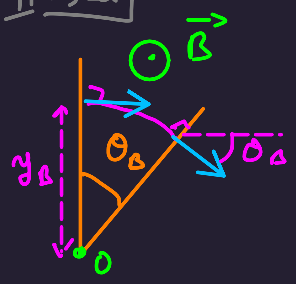
b) On doit aussi $2R \leq a$ ie

$$\boxed{B \geq \frac{2 m v_4}{q\, a} = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{8\,\underset{23u}{m}\,\underset{25kV}{U}}{e}} = 4{,}37 \cdot 10^{-1}\,T}$$

La seule valeur possible est $n = 1$ → $\boxed{B_{min} = 0{,}75\,T}$

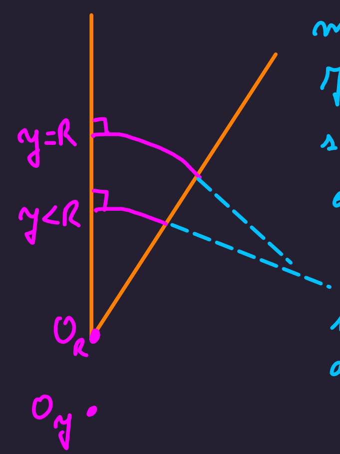
La valeur $a = 100$ cm est cependant difficilement réalisable pour un dispositif sous vide.

II-5-a]



La déviation est θ_B si O est le centre de la trajectoire circulaire, ie si $\boxed{y_B = R = \frac{m v_4}{eB}}$

II-5-b]



L'ion incident en $y < R$ a une trajectoire de même rayon $\frac{m v_4}{eB}$ mais de centre O_y plus bas. Il est donc moins dévié, et les 2 trajectoires s'intersectent. De même, un ion incident en $y > R$ sera davantage dévié. On peut vérifier que pour $y \simeq y_R$, toutes les trajectoires s'intersectent en un même point, analogue du foyer en optique géométrique.

Exo 1.

1) $SiO_{2(s)} + 2H_2O \rightleftharpoons H_4SiO_{4\,aq}$ $\begin{cases} s : \text{solubilité} \\ V : \text{volume} \end{cases}$

$n_0 - sV \qquad\qquad sV$

À l'équilibre $s = K = \boxed{2{,}0\,10^{-3}\ mol.L^{-1}}$

2 a) L'acidité de H_4SiO_4 n'est pas très marquée on suppose qu'il se dissocie peu et que le pH restera dans le domaine $\leq pKa_1 = 9{,}5$. On utilise alors $pH = \frac{1}{2}(pKa_1 - \log s_0) = 6{,}15$

qui est bien dans le domaine de validité de la formule utilisée. La solubilité est alors

$s = [H_4SiO_4] + [H_3SiO_4^-] + [H_2SiO_4^{2-}]$

avec $[H_4SiO_4] \simeq s_0$

$[H_3SiO_4^-] = [H_4SiO_4]\,10^{pH-pKa_1} \simeq 10^{-3{,}35}[H_4SiO_4]$
$\ll s_0$

et $[H_2SiO_4^{2-}] = [H_3SiO_4^-]\,10^{pH-pKa_2} \ll s_0$

soit $s \simeq s_0$.

b) Les ions OH^- apportés par la soude vont réagir totalement avec les acides. Par ailleurs l'équilibre de constante K assure qu'on a toujours $[H_4SiO_4] = K = s_0$. On a donc

$$H_4SiO_4 + OH^- = H_3SiO_4^- + H_2O$$

$s_0 \qquad 4s_0 - x_v \qquad x_v$

en supposant de plus $12{,}6 \geq pH \geq 9{,}5$ à l'équilibre pour pouvoir négliger $H_4SiO_{4(aq)}$ et $H_2SiO_3^{2-}$ aq.

On suppose que OH^- est presque totalement consommé

soit $x_v = 4s_0 = 2{,}8.10^{-2}\ mol.L^{-1}$

et $\boxed{s = [H_4SiO_4] + [H_3SiO_4^-] = 5s_0}$

Il reste à vérifier que : $[OH^-] \ll 4s_0$
- $9{,}5 \leq pH \leq 12{,}6$

On utilise $pH = pKa + \log\frac{[H_3SiO_4^-]}{[H_4SiO_4]} = 9{,}5 + \log 4 = 10{,}1$ dans le bon domaine de pH. De plus, $pH = 10{,}1 \to [OH^-] = 10^{-3{,}9} \ll 4s_0$

On vérifie : $[OH^-] \ll 4s_0$ ✓

$9{,}5 \leq pH \leq 12{,}6$. ✓

On a dissous $\boxed{5s_0 \simeq 10^{-2}\ mol/L}$ de solution.

3-a) Le 2a) donne $\boxed{s \approx s_0 = 10^{-2{,}7}}$

et b) quand H_4SiO_4 prédomine i.e. $pH \leq 9{,}5$.

- Pour $9{,}5 \leq pH \leq 12{,}6$, $H_3SiO_4^-$ prédomine et

$s = [H_4SiO_4] + [H_3SiO_4^-] \simeq [H_3SiO_4^-] = K \times 10^{pH-pKa_1}$

soit $\boxed{\log s \simeq cst + pH}$

C'est bien ce qu'on observe.

On lit en particulier $s \simeq 10^{-2}$ mol.L^{-1} pour pH=10.

• Pour pH ≥ 12,6, on aura de la même manière $H_2SiO_4^{2-}$ prédominant et donc

$s \simeq [H_2SiO_4^{2-}] = K\,10^{2pH-(pKa_1+pKa_2)}$ $\boxed{\rightarrow \log s = cte + 2pH}$

on lit bien 1 pente de 2

4a) Les diagrammes sont

$CO_{2aq} \overset{6,3}{|} HCO_3^- \overset{10,3}{|} CO_3^{2-} \longrightarrow$ pH

$H_4SiO_4 \underset{9,5}{|} H_3SiO_4^- \underset{12,6}{|} H_2SiO_4^{2-}$

$\boxed{HCO_3^- \text{ et } H_4SiO_4 \text{ prédominent}}$

b) En supposant qu'on est dans le domaine pH ∈ [7;8], on aura

$$\underbrace{A(s) + CO_{2g} \rightleftharpoons \underset{x_v}{Na^+} + \underset{2x_v}{2H_4SiO_4} + \tfrac{1}{2}K(s) + \underset{x_v}{HCO_3^-}} \quad K_{al}$$

$$A(s) + H_3O^+ \rightleftharpoons Na^+ + 2H_4SiO_4 + H_2O + \tfrac{1}{2}K(s) \quad K_2$$

$$CO_2(g) \rightleftharpoons CO_2(aq) \quad K_3$$

$$CO_2(aq) + 2H_2O \rightleftharpoons HCO_3^- + H_3O^+ \quad K'_{a1}$$

soit $K_{al} = K_2 K_3 K'_{a1} = 10^{-9,7}$

c) et d) On a $\dfrac{p^\circ \cdot x_v \, 4x_v^2 \, x_v}{c^{\circ 4} P_{CO_2}} = K_{al}$

$\dfrac{x_v}{c^\circ} = \sqrt[4]{\dfrac{K_{al} P_{CO_2}}{4\,p^\circ}} = \boxed{5,4 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}}$

soit $\boxed{\begin{array}{l}[Na^+] = [HCO_3^-] = 5,4 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1} \\ [H_4SiO_4] = 1,1\cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}\end{array}}$

On a $[CO_{2aq}] = K_3 P_{CO_2} = 2,5 \cdot 10^{-5}$ mol.L^{-1}

$[HCO_3^-] = 5,4 \cdot 10^{-4}$ mol.L^{-1}

$\rightarrow pH = pK'_{a1} + \log \dfrac{[HCO_3^-]}{[CO_{2aq}]} = \boxed{7,6}$

e) $s = \dfrac{[H_4SiO_4]}{2} \propto P_{CO_2}^{+1/4}$